Exemple de résolution d'une équation du 3ème degré du type :   Ax^3 + Bx^2 + C = 0

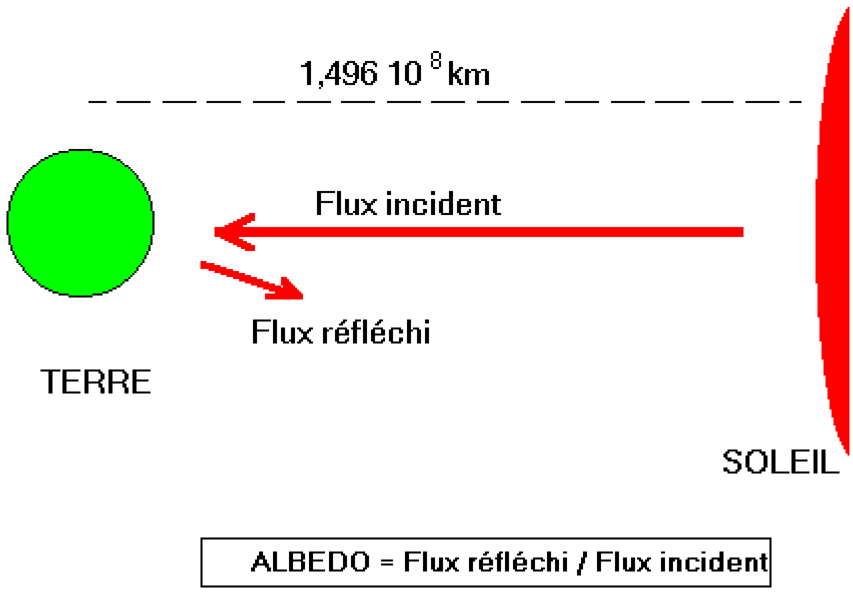
Le terme en x est absent dans ce problème, car
la forme générale est Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 et C est nul.

La résolution consiste à chercher la ou les valeurs de x pour satisfaire l'équation = 0

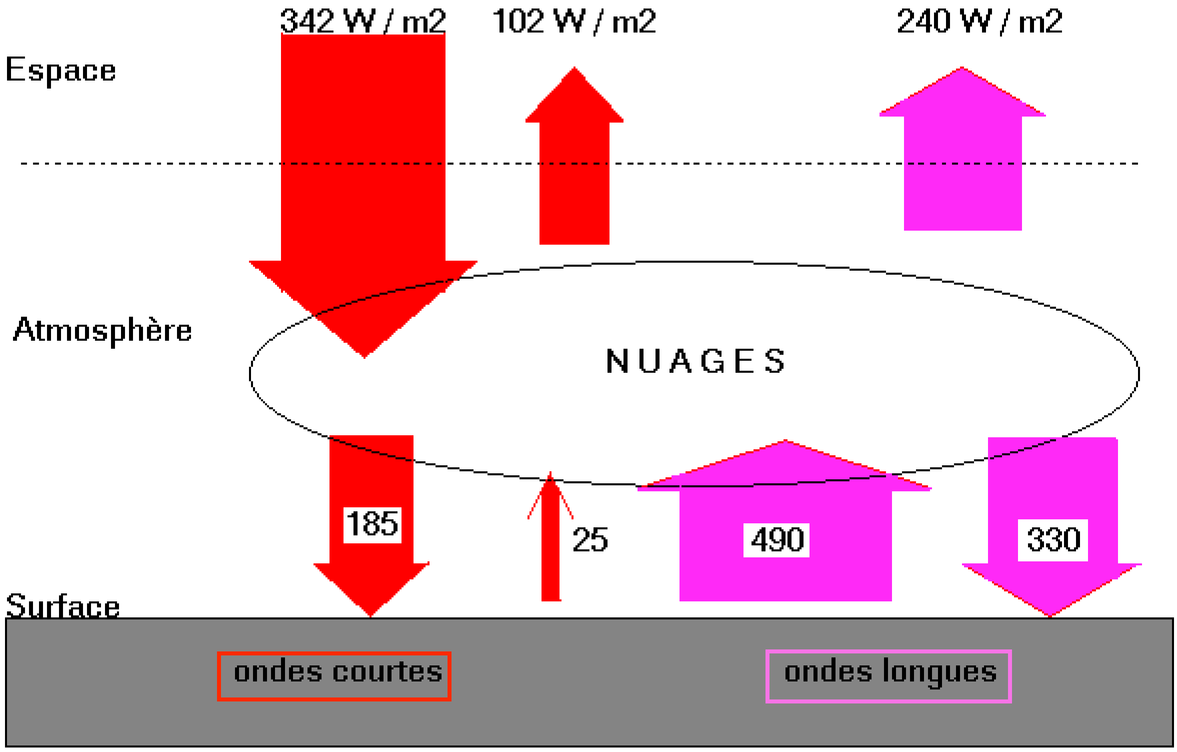
L'exemple qui est traité est une application concernant le vol des ballons-sondes à l'hélium.

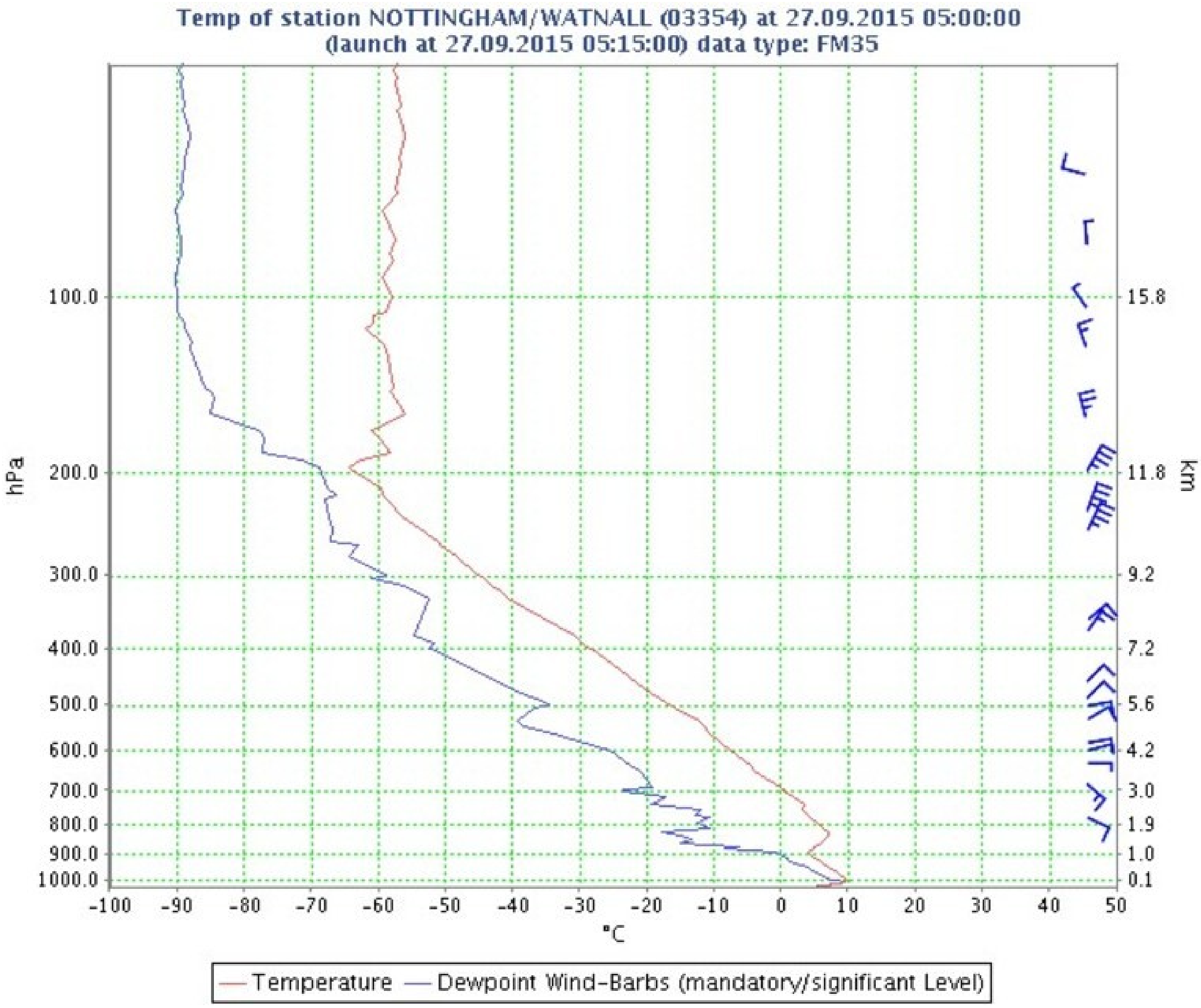
1 ère partie   équations de base au gonflage

L'objectif d'un ballon-sonde est de porter à une altitude donnée, une charge utile ayant pour fonction de mesurer des paramètres atmosphériques pendant la montée jusqu'à l'altitude considérée.
Dans le domaine météorologique, l'enregistrement des données à la descente n'est pas obligatoirement réalisé.

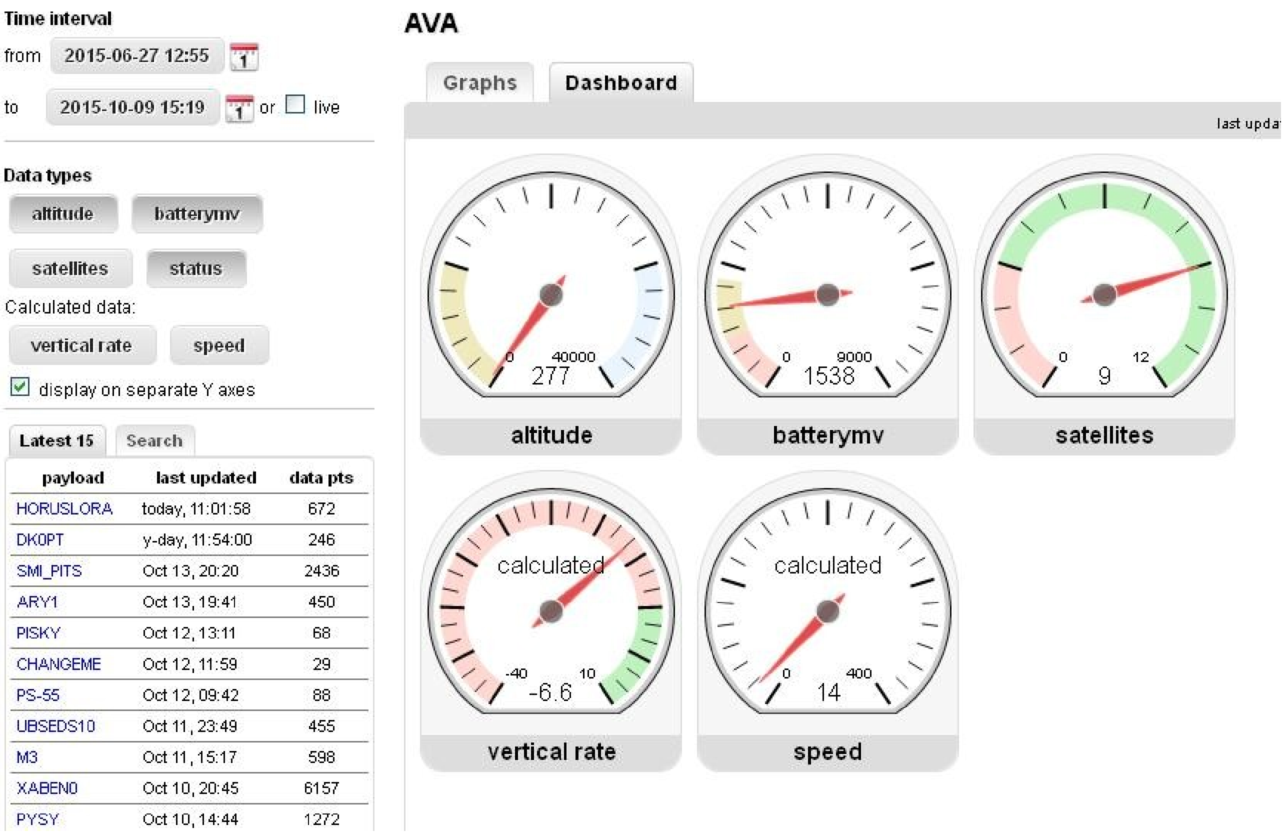


Dans le cadre de nos activités, nous faisons le choix de recueillir tous les paramètres physiques concernant des mesures dans l'atmosphère et des mesures à partir d'une position située entre la Terre et l' Espace.

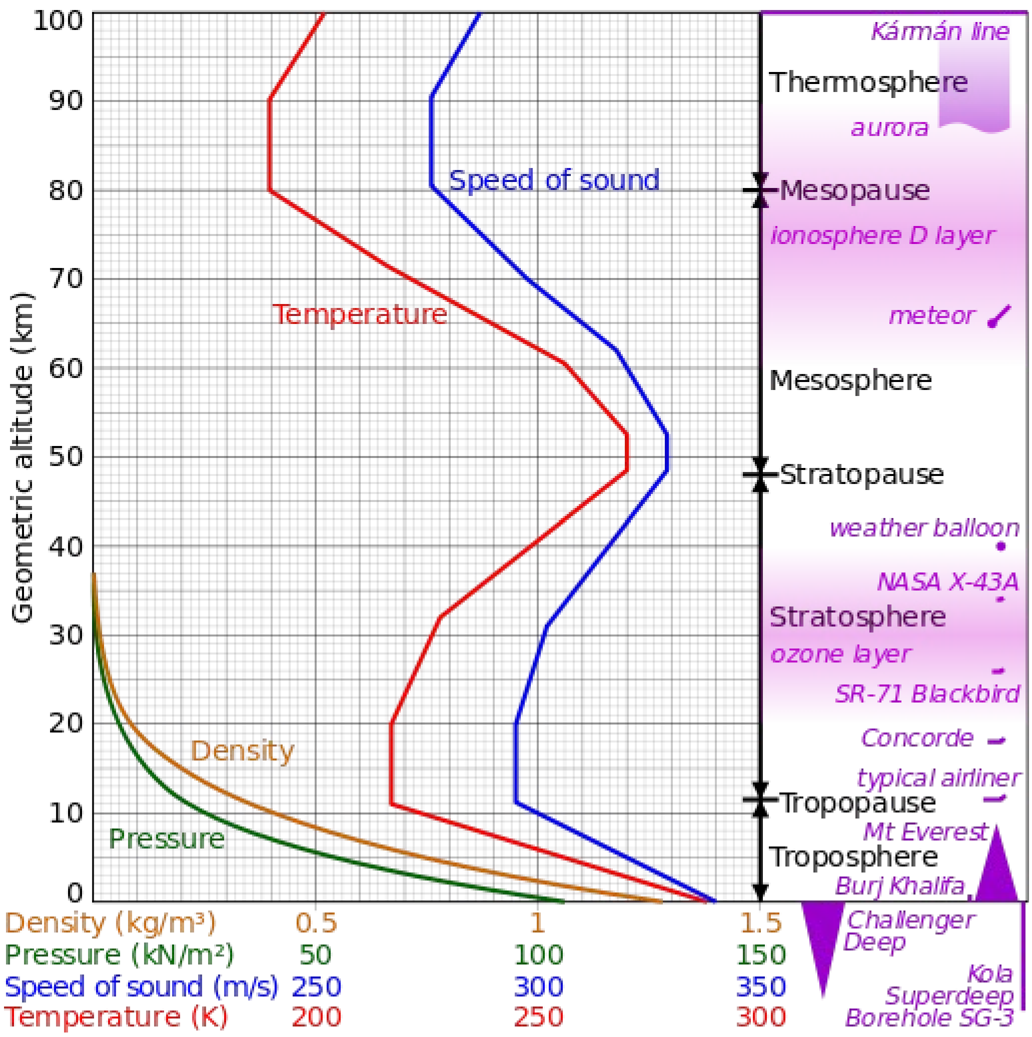




Exemple de relevés mis sous forme d' Emagramme des météorologues, à partir d'une radiosonde de la station Nottingham-Watnall,



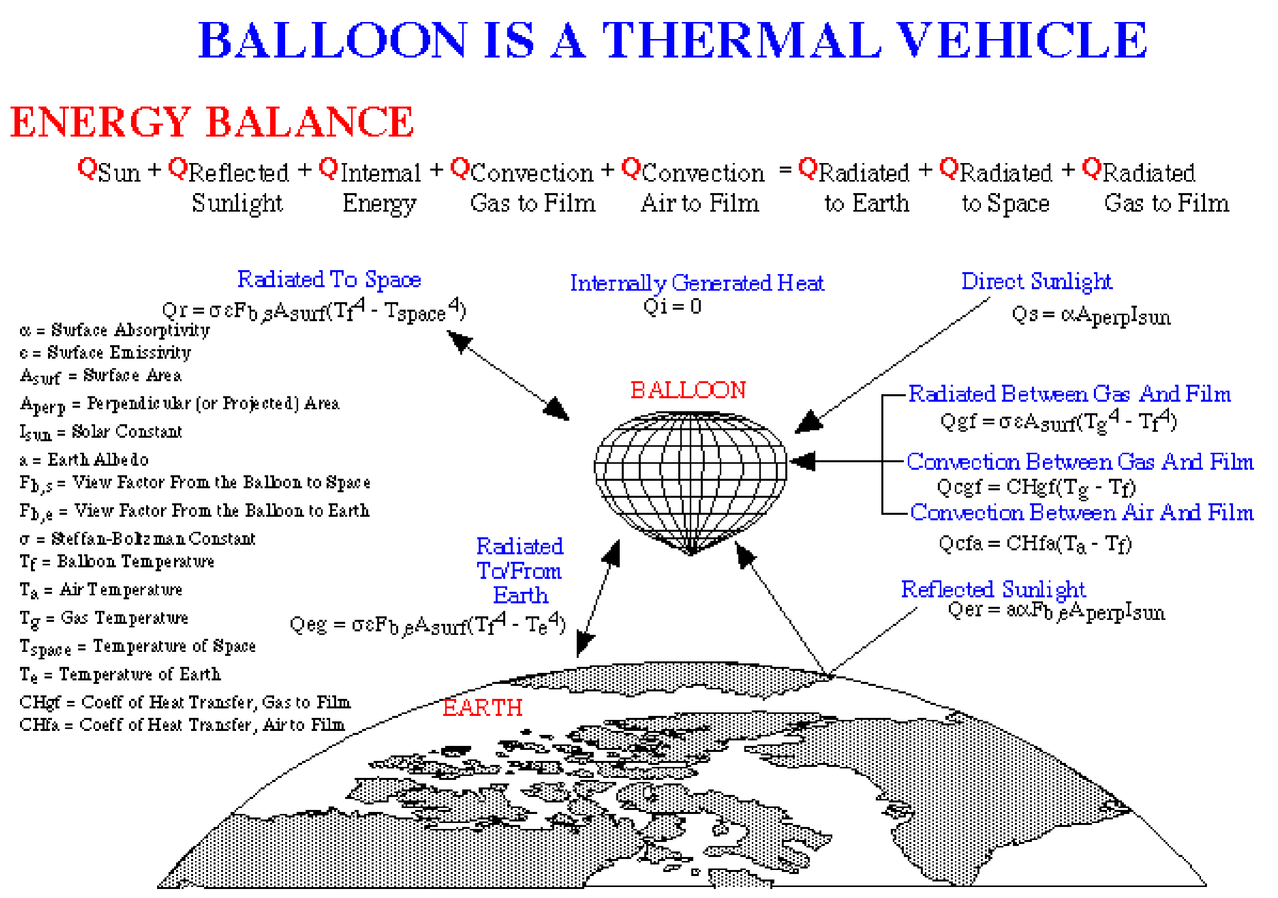
Exemple de présentation des données recueillies par un ballon-sonde amateur.



Evolution des principaux paramètres physiques en fonction des altitudes dans les couches successives de l'atmosphère.

Les activités ont pour objectifs de comparer les équations des paramètres physiques comme ceux qui sont présentés ci-dessus avec les équations issues de l'enregistrement des données recueillies pendant les vols des radiosondes et des ballons amateurs, encore appelés « ballons haute altitude ».

Il y a beaucoup d'autres paramètres à mesurer dans l'atmosphère terrestre, comme les vitesses de montée ou de descente du ballon et des vents, le taux de radioactivité, la présence des aérosols...



Nous allons déterminer comment s'effectue la variation du volume de l'enveloppe en fonction de l'altitude.
Intuitivement, nous savons que cette enveloppe de latex va augmenter son volume au fur et à mesure de l'ascension en raison de la diminution de la masse volumique de l'air et ce sera l'éclatement !
Le fournisseur des enveloppes indique pour chaque modèle le diamètre à l'éclatement. (Ne pas dire « explosion » dans ce cas).

La connaissance de l'altitude atteinte au moment de l'éclatement, est une valeur très importante pour permettre de déterminer à l'avance la trajectoire du vol.
Dans la pratique, l'éclatement (ou « burst ») va dépendre du volume

d'hélium initial injecté pendant l'opération de gonflage et du type d'enveloppe. Un ballon sous- gonflé éclatera plus tardivement, et si il est sur- gonflé il éclatera plus vite. Pour fixer avec plus de rigueur, et prédéterminer la trajectoire, il est préférable de connaître à l'avance le volume de l'enveloppe en fonction de l'altitude sachant quel est le volume initial au gonflage.
Ce volume initial sera déterminé en fonction de la quantité d'hélium injecté pendant l'opération de gonflage. La masse d'hélium sera considérée comme constante pendant la montée. Sauf une fuite !
C'est le choix de la vitesse de montée souhaitée qui permettra d'évaluer le volume de gonflage correspondant. Voir plus bas.
Celui ci devra être évalué avec le plus grand soin. Ce n'est pas une obligation mais il est préférable de tout connaître dans un projet.
En fonction de la météo, l'évaluation du volume de gonflage se fera de différentes manières :

- avec un manomètre. (différence de pression).
- avec un dynamomètre (ressort gradué).
- avec une tare (bidon d'eau ou poids).
- avec une balance. (force).
- par mesure du diamètre. (relation entre rayon et volume).

Un gonflage sous bâche ne permet pas d'autre mesure la pression par l'utilisation d'un manomètre. Ce procédé est peu précis et dépend de la précision du manomètre gradué de 200 bars à 0.
La pression dans une bouteille varie en fonction de sa température.

Voir les documents sur le gonflage et le décollage d'un ballon.

$$\text{Fal} = \text{Pa} - \text{Phe} - \text{Poids sauf hélium}$$
$$\text{Fal} = \text{Pa} - \text{Poids total y compris l'hélium}$$

$$\text{Fal} = \text{Rhoair} \cdot \text{Vb} \cdot g - \text{Ptotal}$$

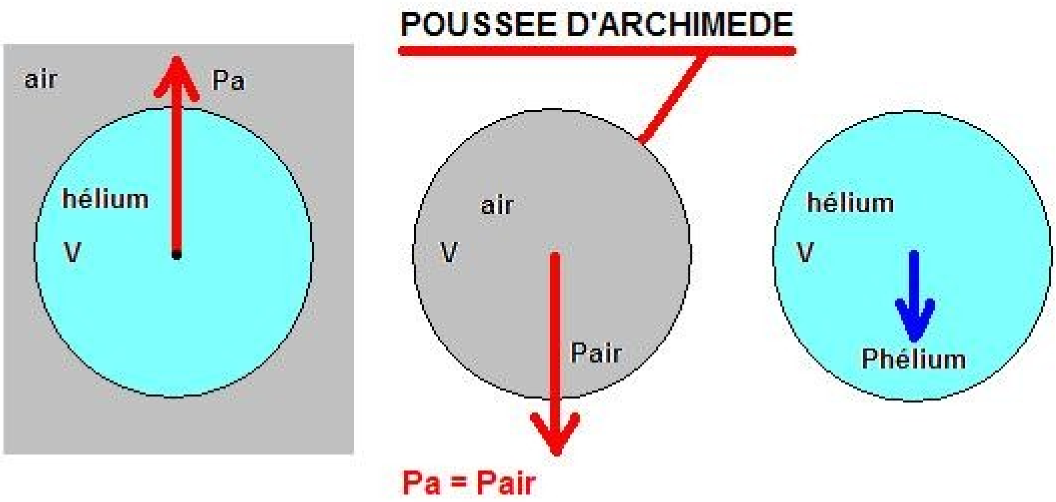
$$\text{Fal} = \underbrace{g \cdot \text{Vb} \left(\text{Rhoair} - \text{RhoHe} \right)}_{\text{Fa}} - \text{P sauf hélium}$$

La force ascensionnelle libre (Fal) est égale à la force ascensionnelle (Fa) à laquelle on retranche la somme des poids sauf l'hélium.
Charge utile et accessoires, ne pas oublier le poids de l'enveloppe.

La force ascensionnelle libre (Fal) est égale à la poussée d'Archimède à laquelle on retranche le poids de l' hélium et la somme des poids sauf hélium (nacelle, accessoires).

La poussée d' Archimède correspond au poids de l'air qui occuperait le même volume que l'enveloppe. On négligera la poussée d'Archimède sur les nacelles et accessoires.

Le poids est défini par le produit d'une masse par l'accélération de la pesanteur. $P = m.g$ comme g varie avec l'altitude, le poids varie avec l'altitude. Voir le document sur la gravité.
Pour de faibles altitudes g sera considéré comme constant = 9,8 m/s^2



En gris : l'air ambiant
En cyan : l'hélium
L'enveloppe va dans tous les cas être soumise à la poussée d' Archimède (Pa) en fonction de son volume. Si ce volume est grand, la poussée sera grande.
Cette poussée (ou force) comme le dit clairement le principe d' Archimède sera égale au poids de l'air qui occuperait le même volume.
Donc Pa = Pair à volume identique.
Revenir à la figure de gauche : l'enveloppe contient un gaz, de l'hélium.
Ce volume d'hélium qui est pratiquement celui de l'enveloppe à l'épaisseur du latex qui est négligée, a un poids Phe.
Si l'enveloppe serait gonflée avec de l'air ambiant, la poussée d' Archimède qui n'a pas disparu, serait équilibrée par le poids de l'air contenu dans cette enveloppe. Pa = Pair et Pa - Pair = 0
Ce ballon ne peut pas s'élever !

On en déduit quand on gonfle un ballon de baudruche avec la bouche qu'il serait souhaitable de le gonfler avec un autre gaz que l'air !
Et de préférence plus léger que l'air.

Pour le même volume, si ce gaz est l'hélium, on sait que le poids de l'hélium injecté Phe sera inférieur à Pair. Phe < Pair

Une force tire le ballon vers le haut car : Pa - Pair = 0 n'est plus vrai, on a avec l'hélium injecté

Pa - Phe > 0 la résultante des forces est appelée « force ascensionnelle » (Fa) telle que : Fa = Pa - Phe

La force ascensionnelle libre (Fal) est égale à (Fa) mais on a retranché la somme des poids de la charge utile, de l'enveloppe, et des accessoires. Fal = Fa - somme des Poids sauf hélium

Pa = Poids de l'air de volume V **Pa = m air . g** **en newton**

on sait que la masse volumique est égale à m/V : $\rho air = \frac{mair}{V}$

d'où $mair = \rho air * V$ **et** **Pa =** $\rho air * V * g$ **en newton**

La poussée d' Archimède est égale au produit de la masse volumique de l'air ambiant (fonction de la température et de la pression de l'air) par le volume occupé et l'accélération de la pesanteur du lieu.

On écrira de même pour l'hélium injecté : Phe = $\rho He * V * g$ **newton**

Remarque : le produit V * g est commun à Pa et Phe

En réunissant les relations dans une seule :
Fal = Fa - somme des Poids sauf hélium

Fal = $\rho air * V * g - \rho He * V * g - (Somme\ des\ masses\ sauf\ He) * g$ **en newton**

On gardera la forme suivante :

Fal = $\rho air * V * g - PHe - \Sigma msaufHe * g$ **en newton**

Le ballon soumis à cette force va se diriger suivant un axe vertical en l'absence de vent, ou plus ou moins en oblique suivant une inclinaison fonction de la vitesse du vent présente sur le lieu. Voir processus de décollage.
En cas de vent fort, le gonflage se fera sous abri ou à défaut sous bâche.

Comme tout objet se déplaçant dans l'air, une force de résistance de l'air ou traînée s'oppose au déplacement, d'intensité fonction de la vitesse du dit objet.
Il est utile de considérer un référentiel (axes X,Y,Z) qui sera relié au point fixe du site de lâcher ou qui sera mobile en suivant la vitesse et de la direction du vent pour des calculs ultérieurs.

La vitesse de montée est un autre paramètre important conditionné par le choix du volume de gonflage. Le premier paramètre étant la masse d'hélium injectée dans l'enveloppe. (ou le nombre de moles).

On prendra soin de relever avant le décollage, sur le site de lâcher :

- la température de l'air en °C
- la pression atmosphérique en hPa
- le taux d'humidité Hu%
- l'altitude du lieu de lâcher
- la vitesse et la direction du vent

Une relation donne la valeur de la résistance de l'air en fonction de la vitesse de déplacement du véhicule (ballon).

T =R= $\frac{1}{2} * S * C_x * \rho\, air * vm^2$ en newton

S : surface droite en m^2
Cx : coefficient de traînée (0,5 pour une sphère).
ρair : en kg/m^3 (normale 1,29 kg/m^3 pour 1013,25 et 0°C).

La mécanique nous apprend que Fal - R = m . γ en newton
masse multipliée par l'accélération de l'objet.
On peut écrire l'égalité Fal = R en régime établi. (quand l'accélération devient nulle).
Après une courte période d'accélération, la vitesse de montée qui est nulle avant le décollage et passe à la valeur limite stabilisée, très peu de temps après . Voir document décollage.

$$T = 1/2 \;.\; Rhoair \;.\; Cx \;.\; S \;.\; v^2$$

$$1/2 \;.\; Rhoair \;.\; Cx \;.\; S \;.\; v^2 = Fal$$

$$v = \sqrt{\frac{Fal}{1/2 \;.\; Rhoair.\; Cx.\; S}}$$

Exemple numérique n°1 :
Le choix de la vitesse de montée limite est souvent choisie à 5 m/s.
On sait que la mole d'hélium (voir cours de chimie) pèse 4 ,003 grammes et qu'une mole d'air sec pèse 28,9644 grammes.
Une mole occupe 22,413968 litres au sol sous 101325 Pa et 0°C.
Car :
V = 8,3144621 * (273,15 + T) / P = 8,3144621 * (273,15 + 0)/ 101325

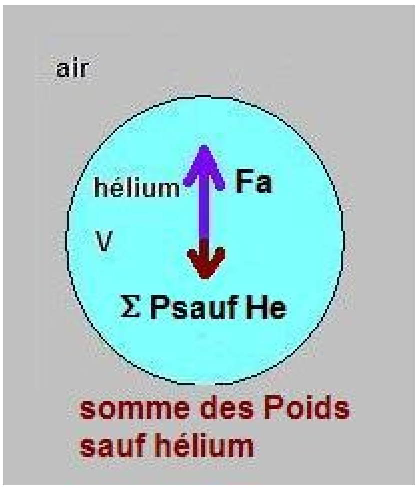
remarque : nous prendrons beaucoup de chiffres après la virgule, parce que la précision recherchée doit être maximale, dans les calculs de distances par la suite.

Si on remplit une enveloppe avec une mole d'hélium, la force ascensionnelle Fa sera égale à (Pa - Phe)
= (28,9644 – 4,003) = 24,9614 en grammes avec les masses des moles.

Attention : j'utilise les masses et non les poids en omettant $g = 9{,}80\ m/s^2$

On place cette enveloppe attachée à un poids de 50 grammes sur une balance précise au dixième de gramme.
L'enveloppe pèse 1,9 gramme.

La balance indique la valeur de la Fal : qui est la résultante de toutes les forces soumises au ballon (enveloppe, gaz et charge).



Fal = Fa - Σ Poids sauf hélium en newton ou
Fal = Fa - Σ masse sauf hélium en kg ou en grammes

Bilan des forces appliquées à un ballon et sa charge :
Fal = Pa - Phe – Penv – Pch = 28,9644 - 4,003 - 1,9 - 50 = -26,9386 grammes indiqués sur la balance.

Fal est négatif : le ballon ne volera pas, avec sa charge trop lourde !
La pesée permet d'en déduire Fa : écrire en grammes

Fa = Pa – Phe = Fal + Penv + Pch = -26,9386 + 1,9 + 50 = 24,9614 grammes avec 1 mole d'hélium.

La charge réelle est fixée à 10 grammes. Pour faire décoller le ballon, nous remplissons avec 3 moles : les masses sont multipliées par 3.

Fa = 3 . 28,9644 - 3 . 4,003 =
Fa = 3 . 24,9614 = 74,8842 grammes
Fal = 74,8842 – 1,9 – 10 = 62,9842 grammes

Les conditions sont P = 1013,25 hPa et T = 0 °C (normales)
Le volume d'une mole est 22,413968 litres ou $0{,}022413968\ m^3$
$V = 0{,}022413968 \cdot 3 = 0{,}06724190\ m^3 = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$
r = 0,25226 m

$S = 3.14159 \cdot r^2 = 0{,}1999\ m^2$

La vitesse de montée sera :

Attention maintenant à respecter les unités ! Fal en Newton, Rho en kg/m^3, S en m^2, et v en m/s ….

$v^2 = 0,0629842 . 9,8 / 0,5 . 1,29 . 0,5 . 0,1999 = 9,57374$

$v = 3,094$ m/s

rapport entre la masse soulevée et la masse d'hélium :

pouvoir du gaz = (4,003 + 1,9 + 10) / 4,003 = 3,973

Vérification avec FAL1.xls Voir DATAS3